САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Совет молодых ученых
Научно-методический отдел по работе с молодыми учеными
и специалистами университета управления
научных исследований СПбГУ

ЧЕЛОВЕК. ПРИРОДА. ОБЩЕСТВО АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Материалы
14-й международной конференции
молодых ученых 26–30 декабря 2005 г.

В 2 частях

Часть I

Издательство Санкт-Петербургского университета
2006

СООТНОШЕНИЕ НАГЛЯДНОГО И ЛОГИЧЕСКОГО В ГЕОМЕТРИИ

Истины геометрии могут быть получены двумя путями: путем наглядного представления или выведены из понятия. Если бы их можно было вывести из понятия, тогда они были бы аналитическими утверждениями. Невозможность второго пути Кант доказывает на примере двух прямых линий, которые не могут замыкать пространство. Можно ли вывести из понятия о прямой и понятия о числе «два» доказательство положения о невозможности замыка-

Романенко Оксана Юрьевна — студентка философского факультета СПбГУ (e-mail: romanenko@list.ru)

ния пространства двумя прямыми. Такое старание, по-видимому, окажется напрасным, но поставит перед необходимостью прибегнуть к наглядному представлению.

В связи с этим интересен вопрос о том, можем ли мы помыслить геометрическое наглядное понятие (например «треугольник»), не представляя его? Как соотносится понятие о треугольнике (если оно вообще существует помимо представления) с образом треугольника?

Своеобразной попыткой помыслить наглядное помимо наглядности является тот отдел геометрии, который называется аналитическим. Изучая аналитический метод геометрии, можно сказать, что он в некотором смысле устраняет проблему наглядности (например такие наглядные понятия, как «право» или «лево» устраняются при характеристике направления оси координат знаками «+» и «–»), но при помощи наглядности же. Ведь как иначе можно проинтерпретировать Декартову прямоугольную систему координат, если не наглядно, поскольку выбирая две взаимно перпендикулярные прямые, мы все равно пользуемся наглядным понятием «пересечения».

Даже несмотря на то, что аналитическая геометрия выводит потом уравнение и для характеристики понятия пересечения (например, чтобы узнать точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = kx + b$, надо решить уравнение $kx + b = x^2$), но какими уравнениями можно задать пересечение самих осей координат?

Бесспорно, ось абсцисс ($y = 0$) и ось ординат ($x = 0$) имеют свои уравнения и пересекаются в точке, где $y = x$,т. е. в точке, равной нулю. Но пока мы не задали данную систему координат, определив ее начало и *указав* именно эти две перпендикулярно пересекающиеся прямые, проходящие через это начало, мы не можем говорить об уравнениях $y = 0$ и $x = 0$ как об уравнениях осей координат.

Момент выбора системы координат является наглядным условием всего последующего аналитического метода. Другое дело, что уравнения $y = 0$ и $x = 0$ будут всегда определять оси координат, поскольку данные равенства являются их определениями.

Вернемся теперь к вопросу о том, можем ли мы помыслить геометрическое наглядное понятие, не представляя его? Попробуем решить данную задачу на примере треугольника. Словарь дает следующее определение треугольника: треугольник — это часть плоскости, ограниченная тремя отрезками прямых, имеющими попарно по одному общему концу. Из понятия треугольника следует наличие у него трех вершин. Задавая вершины некоторыми тремя точками (произвольными), можно построить произвольный треугольник.

Задав таким образом треугольник, мы можем описать его свойства не глядя на него, аналитически их вычислив. Например, можно установить, что заданный нами треугольник — прямоугольный, поскольку зависимость между квадратами длин его сторон выражается формулой: $AC^2 = AB^2 + BC^2$, поэтому угол B — прямой угол (предварительно вычисляются длины сторон по формуле $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Получается, что прямоугольность угла можно наблюдать аналитически (также как и понятие перпендикулярности прямых), причем только аналитически, поскольку когда мы смотрим на две прямые, пересекающиеся так, что все четыре угла, образовавшихся при этом, равны, то, фиксируя равенство углов, мы фиксируем не что иное, как логическое тождество чисел, определяющих эти углы. Развернутость угла изначально задана числом, еще до наглядности. Конечно, если мы нарисуем систему координат, поставим данные точки, изобразим данный треугольник, то сделаем тоже такие выводы о его свойствах.

Тогда возникает вопрос: даже при том, что нарисованный треугольник, бесспорно, обладает статусом наглядности, не являются ли все его свойства (такие как развернутость углов, длины сторон) изначально числовыми? Не являются ли все его свойства только отношениями между числами, определяющими точки в пространстве еще до всякой наглядности? А уже потом данные соотношения чисел иллюстрируются наглядно? Иными словами, наше наглядное представление о тупом угле — не есть ли оно изначально улавливание (схватывание) свойств тупого угла, содержащихся в его понятии — $OA^2 > AB^2 + BO^2$. Является ли сама наглядность лишь результатом числовой раскладки? А аналитический метод геометрии — не просто математическое описание геометрических свойств, но метод первичного конституирования наглядного смысла?

Переход от уравнения к графику возможен только при условии, что переменные рассматриваются как координаты точки на плоскости. Интересна сама возможность этого перехода — так как этот переход является ни чем иным, как переводом с языка (математика) на некий не-язык (наглядность) — тот факт, что уравнение (через посредство системы координат, т. е. системы отношений) имеет свой наглядный аналог. Чем является число, если в его понятии присутствует не только элемент счета, но и элемент наглядности?

Но если построение математики начинается с геометрии, то как может быть осуществлен переход к арифметической части? Переход от числа к образу — это двусторонний переход, возможный исключительно благодаря системе координат, которая совмещает в себе как наглядность (пересечение осей), так и аналитику (пронумерованные отрезки).

Система координат, посредством которой осуществляется переход из наглядной геометрии в геометрию аналитическую, сама представляет интерес как понятие, стоящее на стыке числа и образа. Координаты (от лат. ***co*** — совместно и ***ordinatus*** — упорядоченный, определенный) — это числа, заданием которых определяется положение точки на плоскости, на поверхности или в пространстве. Числа служат определениями положений точек в пространстве, что возвращает к проблеме ***определения***. Но числа не являются ни генетическими определениями точек, ни логическими (через род и вид), ни семантическими. Числа, именно в силу того, что можно установить взаимно однозначное соответствие между точками и числами, именно потому, что определяемые точки и определяющие их числа могут быть полностью взаимозаменимы, — именно поэтому числа являются синтаксическими определениями.

Таким образом, числа есть *имена* точек, но такие *имена*, между которыми также существуют зависимости, как и между точками пространства, — порядковые (***ordinatus***) и соединительные (***co***). Поэтому функция системы координат — дать *имена* точкам,т. е. назвать их, проявить их в языке.

Э. Гуссерль в работе «Начало геометрии», обращаясь к проблеме начала геометрических образов (т. е. к проблеме конституирования смысла геометрического построения), разводит понятие языка и понятие объективной геометрической идеальности. Согласно Гуссерлю, есть некие идеальные геометрические предметы (или наглядности еще до всякого именования их в зыке) и геометрические термины, теоремы и теории, являющиеся языковыми образованиями. Таким образом, вопрос о соотношении языка геометрии и ее образов у Гуссерля аналогичен тому вопросу, который ставится и в данной работе: о соотношении наглядности и доказательности в геометрии, в которой «являются темой как раз идеальные предметности, а вовсе не те, которые подпадают под понятие языка»[1]. Поэтому сами идеальные предметности (наглядности), начала геометрии, невыразимы в языке, но в языке происходит открытие свойств геометрических образов в форме словесных высказываний зависимостей.

Но как психически (наглядно) конституированный образ обретает собственное межсубъектное бытие в качестве некой идеальной предметности? Иными словами, можем ли мы передать другому образ, не нарисовав его? Наверное, можем: например посредством формулы, предварительно договорившись на математическом языке, что мы подразумеваем под какими числовыми соотношениями. Но если мы под математическими соотношениями подразумеваем все равно геометрические образы, то образ можно передать другому только наглядно, а математически — только в том случае, если мы наглядность интерпретируем посредством наглядности же, т. е. системы координат.

Таким образом, интерсубъективность возможна только на основе наглядности (выражаясь языком Канта — на основе общности априорных структур) или на основе языка, который, в свою очередь тоже отсылает к наглядности. «Но как возможна, напротив, такая наука, как геометрия? — пишет Гуссерль, — Как может она как систематическое, бесконечно растущее ступенчатое строение идеальностей удерживать в живой реактивируемости свою изначальную осмысленность?»[2].

В геометрии, чтобы стали доступными пониманию такие уже ненаглядные образы, как бесконечные искривленные поверхности, которые невозможно созерцать единым взглядом, но только «проследить» или задать с помощью формул, т. е., говоря словами Гуссерля, чтобы геометрия оставалась произведением идеальностей, из которых производятся идеальности высшей ступени, для этого геометрия не должна «изнуряться», делая очевидными или наглядными все свои образы, именно для этого геометрия впадает в «искушение языком», или в связанную с языком логическую активность.

Превращая «очевидностные» отношения в логические цепи, открывая аналитически законы (которые уже в качестве законов не являются наглядностями) геометрии, мы как бы «обесконечиваем» нашу способность к восприятию наглядности, мы можем наглядно воспринимать даже ненаглядное, имея при этом «руководства» в виде формул, согласно которым можно судить об основных свойствах неизобразимого, об очевидности неочевидного. Но даже эта очевидность без ее соотнесения с первоначальной наглядной очевидностью не может сделать геометрию лишенной геометрического смысла традицией в силу нашей способности улавливать в любом уравнении, содержащем переменные, его наглядный смысл, а в любом геометрическом образе — его числовые соотношения.

«Чувственно наглядная демонстрация понятий на начерченных фигурах подменяет действительное производство первоидеальностей»[3], поэтому именно тогда, когда наглядность перестает быть чувственной, она ухватывает смысл. К смыслу можно подступить с двух сторон одновременно: с наглядной и аналитической, только тогда открывается возможность его конституирования.

Поэтому геометрия — это прежде всего metrio, измерение. Измерение созерцаемого смысла.

---

[1] *Гуссерль Э.* Начало геометрии. СПб., 2002. С. 105.

[2] Там же. С. 224.

[3] Там же. С. 228.